2005/2006 7/02/2006

Devoir surveillé N°5 Terminale S spé (2 heures).

Exercice 1 : **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité** *(Bac 2001) (10 points)*

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome. Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Démontrer avec précision que le couple (u ; v) est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

2. a. Déterminer un couple d'entiers relatifs (x_0 ; y_0) solution particulière de l'équation (E_2) :
$35x - 27y = 1$.
b. En déduire une solution particulière (u_0 ; v_0) de (E_1).
c. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1).
d. Déterminer la solution (u ; v) permettant de déterminer J_1.
3. a. Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?
b. Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile.).
c. Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

Exercice 2 : **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité** *(10 points)*

Dans tout l'exercice n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Prouver que : $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots\ldots + a + 1)$ pour tout réel a.
2. Décomposer $2^{11} - 1$ en produit de nombres premiers.
3. On appelle nombre de Mersenne de rang n et on note M_n le nombre $2^n - 1$.
   a. Quels sont les nombres premiers parmi les nombres de Mersenne pour $n \leq 6$?
   b. Prouver que si d divise n alors M_n est divisible par $2^d - 1$.
   c. En déduire que si M_n est premier alors n est premier.
4. Si p est premier, M_p est-il premier ?
5. On suppose que l'entier b est supérieur à 1. Prouver que si $b^n - 1$ est premier alors **nécessairement** b = 2 et n est premier.

2005/2006 CORRIGE

Exercice 1 : 1. L'astre A repassera tous les 105x jours après J_0 et l'astre B passe 6 jours après J_0 puis tous les 81y jours donc le nombre de jours séparant J_0 du jour d'une apparition simultanée (=conjonction) vérifie : $105x = 81y+6$ en désignant par x le nombre de périodes effectuées par A et par y le nombre de périodes effectuées par B. D'où en simplifiant par 3 : $35x - 27y = 2$.

2. a) On a $35=27 \times 1+8$
$27=8 \times 3+3$ $8=3 \times 2+2$ $3=2+1$ d'où : $1 = 3 - 2 = 3-[8 - 2 \times 3] = 3 \times 3 - 8$
$1 = 3[27 - 3 \times 8] - 8 = 3 \times 27 - 10 \times 8$
$1 = 3 \times 27 - 10[35 - 27] = - 10 \times 35 + 13 \times 27$ d'où $-10 \times 35 + 13 \times 27 = 1$.
Une solution particulière de E_2 est donc le couple $(x_0 ; y_0)=(-10 ; -13)$;
b) On en déduit une solution particulière de E_1 qui est le couple $(u_0 ; v_0) = (- 20; - 26)$.
c) (u ; v) est solution de E_1 si et seulement si : $35(u - u_0) = 27(v - v_0)$.
27 et 35 sont premiers entre eux et 27 divise $u - u_0$ donc $u - u_0= 27k$, $k \in \mathbb{Z}$ et $v - v_0 =35k$.
Réciproquement, les couples $(- 20 + 27k ; - 26 + 35k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ sont solutions de E_1.
d) On cherche la plus petite solution avec $u > 0$, $v > 0$ qui a lieu pour $k = 1$ et qui donne $u = 7$, $v = 9$.

3. a) et b) Le nombre de jours écoulés entre J_0 et J_1 est donc 105×7 ou $9 \times 81 + 6$ c'est-à-dire 735 jours or $735 = 2 \times 365 + 5$, 2000 étant bissextile, on a $2 \times 365 + 1$ qui est le 7 décembre 2001, donc la date est le mardi 11 décembre 2001. Un mardi car $365 = 52 \times 7 + 1$ et il y a donc un décalage de 7 jours de la semaine exactement : 2 + 5 .
c) Pour $k = 2$, on a $u = 34$ et $v = 44$. La 2e conjonction se produit donc 3 570 jours après J_0, donc 2 835 jours après J_1.

Exercice 2 :

1. Plusieurs méthodes sont possibles. En voici une : si a = 1 l'égalité est vraie.
   Supposons $a \neq 1$ on sait que $(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots\ldots + a + 1) = \dfrac{1 - a^n}{1 - a}$ (somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison a) d'où le résultat.
2. $2^{11} - 1 = 23 \times 89$
3.
   a. $M_2 = 3$, $M_3 = 7$ et $M_5 = 31$ sont premiers. $M_4 = 15$ et $M_6 = 63$ sont composés.
   b. Soit q tel que $n = d \times q$ ($q \geq$ I) .
   Alors comme $2^n - 1 = (2^d)^q - 1 = (2^d - 1)((2^d)^{q-1} + (2^d)^{q-2} + .. + 1)$ en utilisant 1. avec $a = (2^d)$ et $n = q$ et comme $((2^d)^{q-1} + (2^d)^{q-2} + \ldots \ldots +1)$ est un entier comme somme de produits d'entiers, on en déduit que $2^n - 1$ est divisible par $2^d - 1$.
   c. Par suite, si M_n est premier alors n est premier car dans b. **on a prouvé la contraposée** : si n non premier alors M_n non premier.
4. D'après 2. , M_{11} n'est pas premier alors que 11 est premier.
5. On sait d'après 1. que $b^n - 1$ est divisible par $b - 1$ pour tout entier b, donc si $b^n - 1$ est premier alors $b - 1 = 1$ donc $b = 2$ et n est premier d'après 3.c.